ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE**

SESSION 1996

PREMIÈRE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Nota : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

*Dans cette épreuve **comme dans toutes celles qui suivront**, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

1) a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base dans laquelle $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un endomorphisme u. Déterminer les sous–espaces F de E u–stables, c'est–à–dire tels que $u(F) \subset F$. (Distinguer suivant la dimension de F.)

b) Montrer que tout sous–espace vectoriel u–stable admet un supplémentaire u–stable.

---

2) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que leurs multiplicités, du polynôme défini, pour n entier positif, par

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k.$$

---

3) a) Expliciter le développement en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k x^k$ de $\sqrt{1+x}$ pour $-1 < x < 1$.

b) M étant une matrice carrée réelle telle que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, expliciter une matrice N sur le même corps que M telle que $M = N^2$.

---

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = \mathrm{e}^{2ina}$ où a est un réel donné.

b) Calculer le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

---

5) a) Soit $ABCD$ le quadrilatère d'aire $\mathcal{A}$ défini, dans un plan euclidien E rapporté à une base orthonormée, par les points de coordonnées respectives $(0,0)$, $(0,1)$, (x,y) et $(1,0)$ avec $x > 0$, $y > 0$ et $x + y > 1$. Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de x et y (on pourra introduire un produit vectoriel dans un espace contenant E).

b) Soit $TUVW$ le quadrilatère convexe strictement inclus dans $ABCD$ obtenu en découpant chaque côté de $ABCD$ en trois parties égales et en joignant deux à deux les points analogues de AB et DC d'une part, de BC et AD d'autre part. Montrer que l'aire de $TUVW$ est égale à $\frac{\mathcal{A}}{9}$.

---

6) Soit P un polynôme complexe de degré n unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient de X^n est égal à 1).

a) Si $Q_n(X) = \prod_{k=0}^{n} (X-k)$, exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{Q_n'(k)}$ à l'aide de factorielles et des nombres $P(k)$.

b) En déduire qu'il existe un entier k entre 0 et n tel que $2^n |P(k)| \geqslant n!$.